МЕХАНИКА
MECHANICS




УДК 539.47
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-113-120

Научная статья



Анализ напряженно-деформированного состояния цилиндра с переменными модулями упругости на основе трехмерных уравнений теории упругости

Д.Д. Исмайылова ✉
Гянджинский государственный университет, г. Гянджа, Азербайджан
✉ celaleismayilova@mail.ru

Аннотация
Введение. Функционально-градиентные материалы находят большое применение, т.к. неоднородность свойств позволяет управлять прочностью и жесткостью контрукций. Этим вызван большой интерес к данной теме в мировой научной литературе. Построение решения таких задач существенно зависит от типа граничных условий. В настоящей работе рассматривается равновесие тонкостенного кругового цилиндра, механические свойства которого заменяются вдоль радиуса. На цилиндрических поверхностях заданы однородные граничные условия, которые до этого не рассматривались, воздействие оказывается на торцах. Математическая постановка задачи осуществляется в линейной теории упругости в рамках осесимметричной деформации. В работе построены выражения для компонент напряженно-деформированного состояния цилиндра, в которых некоторые коэффициенты находятся из решения полученной системы линейных алгебраических уравнений.
Материалы и методы. Материал цилиндра является линейно упругим, модуль упругости которого линейно зависит от радиальной координаты. Основным методом исследования является ассимптотический метод, в котором в качестве малого параметра выступает половина логарифма отношения внешнего и внутреннего радиусов. Для построения характеристик напряженно-деформированного состояния цилиндра применены итерационные процессы.
Результаты исследования. Для линейно-упругого функционально-градиентного полого тонкостенного цилиндра получены однородные решения краевой задачи. Анализ этих решений позволяет раскрыть характер напряженно-деформированного состояния в стенке цилиндра. С этой целью проведен асимптотический анализ решений, получены соотношения для перемещений и напряжений. Установлено, что эти решения соответствуют пограничному слою, при этом их первые члены определяют краевой эффект Сен-Венана, аналогичный теории плит.
Обсуждение и заключение. Построенное с помощью асимптотического разложения аналитическое решение задачи о равновесии неоднородного по радиусу тонкостенного цилиндра может быть использовано для численного решения конкретной задачи. Для этого нужно решить полученные системы линейных алгебраических уравнений и определить соответствующие коэффициенты. Полученные асимптотические представления позволяют анализировать трехмерное напряженно-деформированное состояние. Выбор количества членов разложения позволяет рассчитать перемещения и напряжения с заданной степенью точности. Этот анализ может быть полезен при оценке адекватности прикладных методов расчета, применяемых в инженерной практике.

Ключевые слова: линейная теория упругости, функционально-градиентный материал, тонкостенный полый цилиндр, однородные решения, пограничный слой, вариационный принцип

Благодарности: авторы выражают благодарность редакции и рецензенту за внимательное отношение к статье и предложения, которые позволили повысить ее качество.

Для цитирования. Исмайылова Д.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния цилиндра с переменными модулями упругости на основе трехмерных уравнений теории упругости. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(2):113–120. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-113-120

Original article

Analysis of Stress-Strain State of a Cylinder with Variable Elasticity Moduli Based on Three-Dimensional Equations of Elasticity Theory

Jalala Ismayilova
Ganja State University, Ganja, Azerbaijan
celaleismayilova@mail.ru

Abstract

Introduction. Functionally graded materials are of great use, because heterogeneity of properties enables to control the strength and rigidity of structures. This has caused great interest in the topic in the world scientific literature. The construction of solutions to such problems depends significantly on the type of boundary conditions. In this paper, we consider the equilibrium of a thin-walled circular cylinder whose mechanical properties change along the radius. Homogeneous boundary conditions were set on cylindrical surfaces that had not been considered before, the effect was on the ends. The mathematical formulation of the problem was carried out in the linear theory of elasticity in the framework of axisymmetric deformation. Expressions were constructed for the components of the stress-strain state of the cylinder, in which some coefficients were found from the solution to the resulting system of linear algebraic equations.

Materials and Methods. The material of the cylinder was linearly elastic, the elastic modulus of which depended linearly on the radial coordinate. The basic research method was the asymptotic method, in which half the logarithm of the ratio of the outer and inner radii acted as a small parameter. Iterative processes were used to construct the characteristics of the stress-strain state of the cylinder.

Results. Homogeneous solutions to the boundary value problem were obtained for a linearly elastic functionally gradient hollow thin-walled cylinder. An analysis of these solutions made it possible to reveal the nature of the stress-strain state in the cylinder wall. For this purpose, an asymptotic analysis of the solutions was carried out, relations for displacements and stresses were obtained. It was determined that those solutions corresponded to the boundary layer, while their first terms determined Saint-Venant edge effect similar to the plate theory.

Discussion and Conclusion. The analytical solution to the equilibrium problem of a thin-walled cylinder inhomogeneous in radius constructed by asymptotic expansion can be used for numerical solution to a specific problem. For this, it is required to solve the obtained systems of linear algebraic equations and determine the corresponding coefficients. The resulting asymptotic representations provide analyzing the three-dimensional stress-strain state. The selection of the number of expansion terms makes it possible to calculate displacements and stresses with a given degree of accuracy. This analysis can be useful in assessing the adequacy of applied calculation methods used in engineering practice.

Keywords: linear theory of elasticity, functionally graded material, thin-walled hollow cylinder, homogeneous solutions, boundary layer, variational principle

Acknowledgements: the author would like to thank the editorial board and the reviewer for the attentive attitude to the article and the suggestions made that helped to improve its quality.

For citation. Ismayilova JJ. Analysis of Stress-Strain State of a Cylinder with Variable Elasticity Moduli Based on Three-Dimensional Equations of Elasticity Theory. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(2):113–120. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-113-120

Введение. Функционально-градиентные материалы находят широкое применение в различных конструкциях. Благодаря зависимости механических свойств от координат можно управлять напряженно-деформированным состоянием (НДС) деталей. Примером использования такой неоднородности может служить цилиндр, механические свойства которого зависят от радиуса. При этом интерес может представлять цилиндр как отдельная конструкция, так и являющийся подтелом составного тела, например, соединяющий две среды с сильно различающимися свойствами. При расчете НДС тонкостенного цилинда используются некоторые прикладные теории. При этом важно знать оценку их адекватности. Особенно в случае неоднородных свойств она может быть осуществлена с помощью компьютерного моделирования или асимптотического анализа на основе трехмерной постановки. Последним определяется актуальность настоящего исследования.

Изучению НДС полых цилиндрических тел в рамках линейной теории упругости посвящен ряд исследований. В [1, 2] на основе метода сплайн-коллокации и метода конечных элементов изучено механическое поведение радиально-неоднородного цилиндра в трехмерной постановке. В [3] изучено НДС цилиндра, свойства которого зависят от радиуса, нагруженного равномерным внутреннем давлением. В [4] проведено аналитическое исследование для функционально-градиентного пьезоэлектрического цилиндра. В [5] построено точное решение для радиально-неоднородного полого цилиндра с экспоненциальным модулем Юнга, постоянным коэффициентом Пуассона и степенным модулем Юнга. В [6, 7] с помощью метода прямого интегрирования получено аналитическое решение осесимметричной задачи термоупругости для сплошного цилиндра, когда коэффициент линейного теплового расширения является произвольной функцией от радиуса. В [8] разработана общая асимптотическая теория трансверсально-изотропного однородного полого цилиндра. Для трансверсально-изотропного однородного цилиндра получены новые группы решений. Приведено сравнение построенных решений с решениями, построенными с помощью прикладных методов расчета. В [9, 10] изучены некоторые краевые задачи теории упругости для функционально-градиентного изотропного и трансверсально-изотропного (плоскость изотропии перпендикулярна оси) цилиндра, в случае, когда модули упругости являются произвольными непрерывными функциями от радиуса цилиндра. В [11] проведен анализ задачи изгибной деформации для радиально-неоднородного цилиндра. Анализ этих работ показывает, что не для всех типов граничных условий на цилиндрических поверхностях имееются асимптотические представления решений.

В настоящей работе на основе асимптотического анализа трехмерных уравнений теории упругости изучаются особенности НДС тонкостенного цилиндра, свойства которого линейно меняются вдоль радиуса. При этом внутренняя граница закреплена в осевом направлении и свободна в радиальном направлении.

Достижение этой цели было получено с помощью нескольких шагов: асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений и построение однородных решений; вывод формул для компонент вектора перемещений и тензора напряжений; учет краевых условий на торцевых поверхностях.

Материалы и методы. Рассматривается радиально-неоднороднополый тонкостенный цилиндр $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2],\ \phi \in [0; 2\pi],\ z \in [-l_0; l_0]\}$ в цилиндрической системе координат r, ϕ, z с началом на его оси. Задача о его равновесии, в случае закрепления цилиндрических поверхностей вдоль оси и нулевых нормальных напряжений, решается в осесимметричной постановке при действии напряжений на его торцах.

Краевая задача состоит из уравнений равновесия [8]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \tag{2}$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{zz}$ — компоненты тензора напряжений.

Определяющие соотношения [8]:

$$\sigma_{rr} = (2G + \lambda)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \tag{3}$$

$$\sigma_{zz} = (2G + \lambda)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right), \tag{4}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = (2G + \lambda)\frac{u_r}{r} + \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \tag{5}$$

$$\sigma_{rz} = G\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right). \tag{6}$$

Здесь $u_r = u_r(r, z),\ u_z = u_z(r, z)$ — компоненты вектора перемещений.

Параметры Ламе изменяются по линейному закону вдоль радиуса:

$$G(r) = G_* r, \quad \lambda(r) = \lambda_* r, \tag{7}$$

где G_*, λ_* — константы.

После подстановки (3)–(7) в уравнения (1), (2) безразмерная система уравнений принимает вид:

$$(2G_0 + \lambda_0)\left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \varepsilon \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\right) + \varepsilon (G_0 + \lambda_0) e^{\varepsilon\rho} \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \rho \partial \xi} + \lambda_0 \varepsilon^2 e^{\varepsilon\rho} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + G_0 \varepsilon^2 e^{2\varepsilon\rho} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \xi^2} - 2G_0 \varepsilon^2 u_\rho = 0, \tag{8}$$

$$G_0\left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial\rho^2}+\varepsilon\frac{\partial u_\xi}{\partial\rho}\right)+\left(2G_0+\lambda_0\right)\varepsilon^2\left(e^{2\varepsilon\rho}\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial\xi^2}+e^{\varepsilon\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\xi}\right)+\left(G_0+\lambda_0\right)\varepsilon e^{\varepsilon\rho}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial\xi}=0. \quad (9)$$

Здесь:

$\rho=\frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$, $\xi=\frac{z}{r_0}$ — новые безразмерные координаты; $\varepsilon=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ — малый параметр в случае тонкостенности; $r_0=\sqrt{r_1r_2}$, $\rho\in[-1;1]$, $\xi\in[-l;l]$, $l=\frac{l_0}{r_0}$; $u_\rho=\frac{u_r}{r_0}$, $u_\xi=\frac{u_z}{r_0}$, $\lambda_0=\frac{\lambda_* r_0}{G_1}$, $G_0=\frac{G_* r_0}{G_1}$; G_1 — некоторый параметр, имеющий размерность напряжения.

Рассмотрим задачу, в которой на боковых поверхностях цилиндра заданы однородные граничные условия:

$$u_\xi\big|_{\rho=\pm1}=0, \quad (10)$$

$$\sigma_{\rho\rho}\big|_{\rho=\pm1}=0. \quad (11)$$

К торцам цилиндра приложены напряжения:

$$\sigma_{\rho\xi}\big|_{\xi=\pm l}=t_{1s}(\rho), \quad (12)$$

$$\sigma_{\xi\xi}\big|_{\xi=\pm l}=t_{2s}(\rho), \quad (13)$$

$(s=1;2)$.

$\sigma_{\rho\rho}=\frac{\sigma_{rr}}{G_1}$, $\sigma_{\rho\xi}=\frac{\sigma_{rz}}{G_1}$, $\sigma_{\xi\xi}=\frac{\sigma_{zz}}{G_1}$ — безразмерные напряжения.

Компоненты вектора напряжений $t_{1s}(\rho), t_{2s}(\rho)$, $(s=1;2)$ удовлетворяют условиям равновесия.

Для построения однородных решениий компоненты вектора смещений будем искать в виде:

$$u_\rho(\rho;\xi)=u(\rho)e^{\alpha\xi}, \quad u_\xi(\rho;\xi)=w(\rho)e^{\alpha\xi}. \quad (14)$$

Подставляя представления (14) в систему (8)–(11), получим:

$$\left(2G_0+\lambda_0\right)\left(u''(\rho)+\varepsilon u'(\rho)\right)+\varepsilon\alpha e^{\varepsilon\rho}\left(\left(G_0+\lambda_0\right)w'(\rho)+\lambda_0\varepsilon w(\rho)\right)+\varepsilon^2G_0\left(\alpha^2e^{2\varepsilon\rho}-2\right)u(\rho)=0, \quad (15)$$

$$G_0\left(w''(\rho)+\varepsilon w'(\rho)\right)+\left(2G_0+\lambda_0\right)\varepsilon^2\left(\alpha e^{\varepsilon\rho}u(\rho)+\alpha^2e^{2\varepsilon\rho}w(\rho)\right)+\varepsilon\left(G_0+\lambda_0\right)\alpha e^{\varepsilon\rho}u'(\rho)=0, \quad (16)$$

$$w\big|_{\rho=\pm1}=0, \quad (17)$$

$$\left[\left(2G_0+\lambda_0\right)u'(\rho)+\varepsilon\lambda_0\left(u(\rho)+\alpha e^{\varepsilon\rho}w(\rho)\right)\right]\Big|_{\rho=\pm1}=0. \quad (18)$$

Исследуем краевые задачи (15)–(18) при $\varepsilon\to0$. Для решения (15)–(18) при $\varepsilon\to0$ воспользуемся асимптотическом методом [9–13].

Ненулевые решения (15)–(18) соответствуют третьему итерационному процессу, компоненты вектора смещений будем искать в виде разложений по малому параметру:

$$\begin{cases} u^{(3)}(\rho)=\varepsilon\left(u_{30}(\rho)+\varepsilon u_{31}(\rho)+\cdots\right), \\ w^{(3)}(\rho)=\varepsilon\left(w_{30}(\rho)+\varepsilon w_{31}(\rho)+\cdots\right), \\ \alpha=\varepsilon^{-1}\left(\beta_0+\varepsilon\beta_1+\cdots\right). \end{cases} \quad (19)$$

После подстановки разложений (19) в уравнения (15)–(18) для членов первого порядка имеем:

$$\left(2G_0+\lambda_0\right)u''_{30}(\rho)+\beta_0\left(G_0+\lambda_0\right)w'_{30}(\rho)+G_0\beta_0^2u_{30}(\rho)=0, \quad (20)$$

$$G_0w''_{30}(\rho)+\beta_0\left(G_0+\lambda_0\right)u'_{30}(\rho)+\left(2G_0+\lambda_0\right)\beta_0^2w_{30}(\rho)=0, \quad (21)$$

$$w_{30}(\rho)\big|_{\rho=\pm1}=0, \quad (22)$$

$$\left(\left(2G_0+\lambda_0\right)u'_{30}(\rho)+\lambda_0\beta_0w_{30}(\rho)\right)\Big|_{\rho=\pm1}=0. \quad (23)$$

Следуя [13], спектральная задача (20)–(23) соответствует потенциальному решению для плиты.

Таким образом решения представляются в виде:

$$\text{а)}\ u_\rho^{(3;1)}(\rho;\xi)=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(-2G_0\beta_{0k}^2\sin\beta_{0k}\sin\left(\beta_{0k}\rho\right)+O(\varepsilon)\right)\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\beta_{0k}+\varepsilon\beta_{1k}+\cdots\right)\xi\right), \quad (24)$$

$$u_{\xi}^{(3;1)}(\rho;\xi)=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(2G_0\beta_{0k}^2\sin\beta_{0k}\cos(\beta_{0k}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k}+\varepsilon\beta_{1k}+\cdots)\xi\right). \quad (25)$$

Здесь β_{0k} является решением уравнения:

$$\cos\beta_{0k}=0. \quad (26)$$

Напряжения, соответствующие решениям (24) и (25), имеют вид:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;1)}=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(-4G_0^2\beta_{0k}^3\sin\beta_{0k}\cos(\beta_{0k}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k}+\varepsilon\beta_{1k}+\cdots)\xi\right), \quad (27)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(3;1)}=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(-4G_0^2\beta_{0k}^3\sin\beta_{0k}\sin(\beta_{0k}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k}+\varepsilon\beta_{1k}+\cdots)\xi\right), \quad (28)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(3;1)}=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(4G_0^2\beta_{0k}^3\sin\beta_{0k}\cos(\beta_{0k}\rho)+O(\varepsilon)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k}+\varepsilon\beta_{1k}+\cdots)\xi\right), \quad (29)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3;1)}=O(\varepsilon). \quad (30)$$

b) $$u_{\rho}^{(3;2)}(\rho;\xi)=\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}F_i\left(2G_0\beta_{0i}^2\cos\beta_{0i}\cos(\beta_{0i}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i}+\varepsilon\beta_{1i}+\cdots)\xi\right), \quad (31)$$

$$u_{\xi}^{(3;2)}(\rho;\xi)=\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}F_i\left(2G_0\beta_{0i}^2\cos\beta_{0i}\sin(\beta_{0i}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i}+\varepsilon\beta_{1i}+\cdots)\xi\right). \quad (32)$$

Здесь β_{0k} является решением уравнения:

$$\sin\beta_{0i}=0. \quad (33)$$

Напряжения, соответствующие решениям (31) и (32), имеют вид:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;2)}=\sum_{i=1}^{\infty}F_i\left(-4G_0^2\beta_{0i}^3\cos\beta_{0i}\sin(\beta_{0i}\rho)+O(\varepsilon)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i}+\varepsilon\beta_{1i}+\cdots)\xi\right), \quad (34)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(3;2)}=\sum_{i=1}^{\infty}F_i\left(4G_0^2\beta_{0i}^3\cos\beta_{0i}\cos(\beta_{0i}\rho)+O(\varepsilon)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i}+\varepsilon\beta_{1i}+\cdots)\xi\right), \quad (35)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(3;2)}=\sum_{i=1}^{\infty}F_i\left(4G_0^2\beta_{0i}^3\cos\beta_{0i}\sin(\beta_{0i}\rho)+O(\varepsilon)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i}+\varepsilon\beta_{1i}+\cdots)\xi\right), \quad (36)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3;2)}=O(\varepsilon). \quad (37)$$

Общее решение (15)–(18) будет суперпозицией решений (24), (25), (31), (32):

$$u_{\rho}(\rho;\xi)=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(-2G_0\beta_{0k}^2\sin\beta_{0k}\sin(\beta_{0k}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k}+\varepsilon\beta_{1k}+\cdots)\xi\right)+\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}F_i\left(2G_0\beta_{0i}^2\cos\beta_{0i}\cos(\beta_{0i}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i}+\varepsilon\beta_{1i}+\cdots)\xi\right), \quad (38)$$

$$u_{\xi}(\rho;\xi)=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(2G_0\beta_{0k}^2\sin\beta_{0k}\cos(\beta_{0k}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k}+\varepsilon\beta_{1k}+\cdots)\xi\right)+\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}F_i\left(2G_0\beta_{0i}^2\cos\beta_{0i}\sin(\beta_{0i}\rho)+O(\varepsilon)\right)\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i}+\varepsilon\beta_{1i}+\cdots)\xi\right). \quad (39)$$

Решения (24), (25), (31), (32) имеют характер пограничного слоя. При удалении от торцов решения (24), (25), (31), (32) экспоненциально убывают.

Чтобы определить константы T_k, F_i, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. Вариационный принцип принимает вид [8]:

$$\sum_{s=1}^{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(\sigma_{\rho\xi}-t_{1s}\right)\delta u_{\rho}+\left(\sigma_{\xi\xi}-t_{2s}\right)\delta u_{\xi}\right]\Big|_{\xi=\pm l}e^{2\varepsilon\rho}d\rho=0. \quad (40)$$

Подставляя (24–36) в (40), имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}M_{jk}T_{k0}=p_{0j}^{(1)}, \quad (41)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}Q_{ji}F_{i0}=p_{0j}^{(2)}. \quad (42)$$

Здесь:

$$M_{jk}=16G_0^3\beta_{0j}^2\beta_{0k}^3\left(\beta_{0j}-\beta_{0k}\right)^{-1}\sin\beta_{0k}\sin\beta_{0j}\sin\left(\beta_{0j}-\beta_{0k}\right)\times\left(\exp\left(-\frac{\left(\beta_{0k}+\beta_{0j}\right)l}{\varepsilon}\right)+\exp\left(\frac{\left(\beta_{0k}+\beta_{0j}\right)l}{\varepsilon}\right)\right),\ \left(при\ \ j\neq k\right)$$

$$M_{jj}=16G_0^3\beta_{0j}^5\sin^2\beta_{0j}\left(\exp\left(-\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right)+\exp\left(\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right)\right),\left(при\ \ j=k\right)$$

$$p_{0j}^{(1)}=2G\beta_{0j}^2\sin\beta_{0j}\left[\int_{-1}^{1}\left(t_{21}(\rho)\cos\left(\beta_{0j}\rho\right)-t_{11}(\rho)\sin\left(\beta_{0j}\rho\right)\right)d\rho\cdot\exp\left(-\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{1}\left(t_{22}(\rho)\cos\left(\beta_{0j}\rho\right)-t_{12}(\rho)\sin\left(\beta_{0j}\rho\right)\right)d\rho\cdot\exp\left(\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right)\right],$$

$$Q_{ji}=16G_0^3\beta_{0j}^2\beta_{0i}^3\left(\beta_{0j}-\beta_{0i}\right)^{-1}\cos\beta_{0j}\cos\beta_{0i}\sin\left(\beta_{0j}-\beta_{0i}\right)\left(\exp\left(-\frac{\left(\beta_{0i}+\beta_{0j}\right)l}{\varepsilon}\right)+\exp\left(\frac{\left(\beta_{0i}+\beta_{0j}\right)l}{\varepsilon}\right)\right),\ \left(при\ \ i\neq j\right)$$

$$Q_{jj}=16G_0^3\beta_{0j}^5\cos^2\beta_{0j}\left(\exp\left(-\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right)+\exp\left(\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right)\right),\left(при\ \ i=j\ \right)$$

$$p_{0j}^{(2)}=2G_0\beta_{0j}^2\cos\beta_{0j}\left[\int_{-1}^{1}\left(t_{11}(\rho)\cos\left(\beta_{0j}\rho\right)+t_{21}(\rho)\sin\left(\beta_{0j}\rho\right)\right)d\rho\cdot\exp\left(-\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{1}\left(t_{12}(\rho)\cos\left(\beta_{0j}\rho\right)+t_{22}(\rho)\sin\left(\beta_{0j}\rho\right)\right)d\rho\cdot\exp\left(\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right)\right],$$

$$T_k=T_{k0}+\varepsilon T_{k1}+\cdots,$$
$$F_i=F_{i0}+\varepsilon F_{i1}+\cdots.$$

Постоянные $T_{kp},F_{ip}\ (p=1,2,...)$ находятся из систем линейных алгебраических уравнений (41), (42), аналогичные которым изучены в [13].

Результаты исследований. В работе в осесимметричной постановке рассмотрено решение задачи линейной теории упругости для функционально-градиентного полого тонкостенного цилиндра, свойства которого изменяются по толщине по линейному закону. На боковых поверхностях цилиндра заданы однородные перекрестные граничные условия, на торцах задан вектор напряжений. Построенные однородные решения удовлетворяют граничным условиям на цилиндрических поверхностях. Для их построения использован асимптотический подход на основе раздожения по малому параметру, характеризующему относительную толщину цилиндра. Для учета неоднородных граничных условий на торцах получены системы линейных алгебраических уравнений, аналогичные изученым в литературе. Показано, что построенные решения НДС имеют погранслойный характер, который соответствует краевому эффекту, аналогичному теории неоднородных плит, носящему имя Сен-Венана.

Обсуждение и заключение. Обычно при изучении НДС тонкостенных конструкций строятся прикладные методы расчета, снижающие размерность задачи. В этой связи актуальной является задача определения диапазона геометрических и механических параметров, в которых эти методы дают приемлемую точность. Построенные в работе на основе асимптотического анализа решения трехмерных уравнений позволяют оценить адекватность таких прикладных теорий с заданным наперед порогом точности. Кроме того, эти решения могут найти применение при оценке численных решений задач для конструкций с функционально-градиентными материалами.

Список литературы

1. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Analysis of the Stress-Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders. *International Applied Mechanics.* 2016;52(4):342–349. https://doi.org/10.1007/s10778-016-0757-3

2. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Three-Dimensional Analysis of the Stress-Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders Using Various Approaches. *International Applied Mechanics*. 2019;55(5):487–494. https://doi.org/10.1007/s10778-019-00970-2

3. Tutuncu N., Temel B. A Novel Approach to Stress Analysis of Pressurized FGM Cylinders, Disks and Spheres. *Composite Structures*. 2009;91(3):385–390. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.06.009

4. Hong-Liang Dai, Li Hong, Yi-Ming Fu, et al. Analytical Solution for Electromagnetothermoelastic Behaviors of a Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinder. *Applied Mathematical Modelling*. 2010;34(2):343–357. https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.04.008

5. Theotokoglou E.E., Stampouloglou I.H. The Radially Nonhomogeneous Elastic Axisymmentric Problem. *International Journal of Solids and Structures*. 2008;45(25–26):6535–6552. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.08.011

6. Tokovyy Yu., Chyzh A., Chien-Ching Ma. *Axisymmetric Thermal Stresses in a Radially-Inhomogeneous Elastic Cylinder Subjected to with-Respect-to-Length Varying Thermal Loadings*. In: Proc. 11th Int. Congress on Thermal Stresses. Palermo: Poguro edizioni; 2016. P. 263–266.

7. Tokovyy Yu., Chien-Ching Ma. Elastic Analysis of Inhomogeneous Solids: History and Development in brief. *Journal of Mechanics*. 2019;35(5):613–626. https://doi.org/10.1017/jmech.2018.57

8. Mekhtiev M.F. *Asymptotic Analysis of Spatial Problems in Elasticity*. Singapore: Springer; 2019. 241 p. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-13-3062-9 (accessed: 10.02.2023).

9. Akhmedov N.K. Axisymmetric Problem of the Elasticity Theory for the Radially Inhomogeneous Cylinder with a Fixed Lateral Surface. *Applied and Computational Mechanics*. 2021;7(2):599–610.

10. Ахмедов Н.К., Акперова С.Б. Асимптотический анализ трехмерной задачи теории упругости для радиально-неоднородного трансверсально-изотропного полого цилиндра. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2011;4:170–180. URL: https://mtt.ipmnet.ru/ru/Issues/2011/4/170 (дата обращения: 10.20.2023).

11. Akhmedov N.K., Akbarova S.B. Behavior of Solution of the Elasticity Problem for a Radial Inhomogeneous Cylinder with Small Thickness. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies Applied Mechanics*. 2021;6/7(114):29–42. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.247500

12. Akhmedov N.K., Sofiyev A.H. Asymptotic Analysis of Three-Dimensional Problem of Elasticity Theory for Radially Inhomogeneous Transversally-Isotropic Thin Hollow Spheres. *Thin-Walled Structures*. 2019;139:232–241. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.03.022

13. Устинов Ю.А. *Математическая теория поперечно-неоднородных плит.* Ростов-на Дону: ООО «ЦВВР»; 2006. 257 с.

References

1. Grigorenko AYa, Yaremchenko SN. Analysis of the Stress-Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders. *International Applied Mechanics.* 2016;52(4):342–349. https://doi.org/10.1007/s10778-016-0757-3

2. Grigorenko AYa, Yaremchenko SN. Three-Dimensional Analysis of the Stress-Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders Using Various Approaches. *International Applied Mechanics*. 2019;55(5):487–494. https://doi.org/10.1007/s10778-019-00970-2

3. Tutuncu N, Temel B. A Novel Approach to Stress Analysis of Pressurized FGM Cylinders, Disks and Spheres. *Composite Structures*. 2009;91(3):385–390. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.06.009

4. Hong-Liang Dai, Li Hong, Yi-Ming Fu, et al. Analytical Solution for Electromagnetothermoelastic Behaviors of a Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinder. *Applied Mathematical Modelling*. 2010;34(2):343–357. https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.04.008

5. Theotokoglou EE, Stampouloglou IH. The Radially Nonhomogeneous Elastic Axisymmentric Problem. *International Journal of Solids and Structures*. 2008;45(25–26):6535–6552. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.08.011

6. Tokovyy Yu, Chyzh A, Chien-Ching Ma. *Axisymmetric Thermal Stresses in a Radially-Inhomogeneous Elastic Cylinder Subjected to with-Respect-to-Length Varying Thermal Loadings*. In: Proc. 11th Int. Congress on Thermal Stresses. Palermo: Poguro edizioni; 2016. P. 263–266.

7. Tokovyy Yu, Chien-Ching Ma. Elastic Analysis of Inhomogeneous Solids: History and Development in brief. *Journal of Mechanics*. 2019;35(5):613–626. https://doi.org/10.1017/jmech.2018.57

8. Mekhtiev MF. *Asymptotic Analysis of Spatial Problems in Elasticity*. Singapore: Springer; 2019. 241 p. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-13-3062-9 (accessed: 10.02.2023).

9. Akhmedov NK. Axisymmetric Problem of the Elasticity Theory for the Radially Inhomogeneous Cylinder with a Fixed Lateral Surface. *Applied and Computational Mechanics*. 2021;7(2):599–610.

10. Akhmedov NK, Akperova SB. Asymptotic Analysis of a 3D Elasticity Problem for a Radially Inhomogeneous Transversally Isotropic Hollow Cylinder. *Mechanics of Solids*. 2011;4:170–180. URL: https://mtt.ipmnet.ru/ru/Issues/2011/4/170 (accessed: 10.20.2023).

11. Akhmedov NK, Akbarova SB. Behavior of Solution of the Elasticity Problem for a Radial Inhomogeneous Cylinder with Small Thickness. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies Applied Mechanics*. 2021;6/7(114):29–42. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.247500

12. Akhmedov NK, Sofiyev AH. Asymptotic Analysis of Three-Dimensional Problem of Elasticity Theory for Radially Inhomogeneous Transversally-Isotropic Thin Hollow Spheres. *Thin-Walled Structures*. 2019;139:232–241. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.03.022

13. Ustinov YuA. *Matematicheskaya teoriya poperechno-neodnorodnykh plit*. Rostov-on-Don: OOO «TSVVR»; 2006. 257 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию 01.03.2023
Поступила после рецензирования 23.03.2023
Принята к публикации 27.03.2023

Об авторе:

Джалала Джамшид кызы Исмайылова, докторант кафедры общих технических наук и технологий Гянджинского государственного университета (AZ2003, Азербайджан, г. Гянджа, ул. Гейдар Алиев, 187), ORCID, celaleismayilova@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received 01.03.2023
Revised 23.03.2023
Accepted 27.03.2023

About the Author:

Jalala Ismayilova, Postdoctoral student of the Department of General Engineering Disciplines and Technologies, Ganja State University (187, Khatai St., Ganja, AZ2003, Azerbaijan), ORCID, celaleismayilova@mail.ru

Conflict of interest statement: the author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.